Capítulo

4

Isomorfismos

4.1 Introducción

En el capítulo 1 tuvimos la oportunidad de estudiar una gran cantidad de ejemplos de grupos. Cada uno de ellos estaba formado por elmentos tomados de algún conjunto en particular. Por ejemplo hay grupos cuyos elementos son matrices, otros están formados por números enteros, otros por simetrías de una figura plana, ..., etc.

Podemos estudiar estos grupos en abstracto, considerando únicamente la forma como se multiplican los elementos. Cuando se construye la tabla de multiplicación de un grupo finito se esta haciendo precisamente eso: recojer toda la información posible sobre la operación en el grupo, sin prestar atención a la naturaleza misma de los elementos.

Es posible que dos grupos finitos del mismo orden tengan tablas de multiplicación diferentes: por ejemplo los enteros módulo 4 y el grupo 4 de Klein. En el primer grupo hay un elemento de orden 4 y en el segundo todos los elementos son de orden 2. Diremos entonces que estos grupos no tienen la misma forma, o bien que ellos no son isomorfos.

El concepto de isomorfismo es fundamental en toda la teoría de grupos, pues permite unificar una gran cantidad de grupos bajo una misma estructura en abstracto.

Cuando se consideran todas las posibles imágenes de un grupo G bajo los isomorfismos de grupos, aparece el concepto de grupo normal. Estos subgrupos normales de un grupo G, se definen usando el concepto de clases laterales. Más tarde se establece la conexión entre un grupo normal y el homomorfismo cociente, cuando se estudien los teoremas de Isomorfismo.

Se concluye este capítulo con una exposición del grupo de automorfismos de un grupo G y se dan algunos ejemplos en casos especiales.

4.2 Grupos Normales

Definición 4.2.1 *Sea G un grupo. Un subgrupo N de G se dice* **subgrupo normal** *de G si y sólo si*

$$gng^{-1} \in N, \quad \text{para todo } g \in G,\ n \in N.$$

Lema 4.2.1 *Sea N subgrupo de G. Entonces N es un subgrupo normal si y sólo si*

$$gNg^{-1} = N, \quad \text{para todo } g \in G. \tag{4.1}$$

Demostración: Sea N normal. Entonces

$$gng^{-1} \in N, \quad \text{para todo } n.$$

Luego $gNg^{-1} \subset N$. En particular

$$g^{-1}Ng \subset N,$$

luego

$$N = g(g^{-1}Ng)g^{-1} \subset gNg^{-1} \subset N,$$

y por lo tanto $gNg^{-1} = N$.

Recíprocamente, si (**??**) es cierto, entonces N es normal en G.

♠

Observación: Si G es un grupo abeliano entonces todo subgrupo N de G es normal. Por lo tanto la noción de normalidad carece de interés cuando trabajamos con grupos abelianos.

Lema 4.2.2 *Sea G un grupo y $N < G$. Entonces N es subgrupo normal de G, si y sólo si toda clase lateral derecha de G es una clase lateral izquierda.*

Demostración: Sea N normal en G. Consideremos la clase lateral derecha Na. Entonces de acuerdo al lema **??**

$$a^{-1}Na = N$$

de donde $Na = aN$. Luego Na es una clase lateral izquierda.

Por otra parte, si $g \in G$, afirmamos que

$$gNg^{-1} = N$$

En efecto, gN es una clase lateral derecha y de acuerdo a la hipótesis debe ser una clase lateral izquierda. Pero

$$g = ge \in gN$$

y además

$$g = eg \in Ng.$$

Luego la única clase lateral izquierda que contienen a g es Ng, y por lo tanto

$$gN = Ng,$$

y de aquí se obtiene

$$gNg^{-1} = N.$$

♠

Ejemplo 1: Consideremos $G = S_3$, $H = \{e, \phi\}$. Calcularemos las clases laterales izquierdas y derechas.

Solución:

Hay tres clases laterales pues

$$[G : H] = \frac{6}{2} = 3.$$

Las clases laterales derechas e izquierdas vienen dadas por:

$$\begin{array}{rclrcl} H & = & \{e, \phi\} & H & = & \{e, \phi\} \\ H\psi & = & \{\psi, \phi\psi\} & \psi H & = & \{\psi, \psi\phi\} \\ H\psi^2 & = & \{\psi^2 \phi\psi^2\} & \psi^2 H & = & \{\psi^2\psi^2\phi = \phi\psi\} \end{array}$$

Como la clase lateral derecha $H\psi$ no es igual a otra clase lateral izquierda, se sigue que H no es normal.

Ejemplo 2: Sea $G = S_3$ y $N = \{e, \psi, \psi^2\}$. Entonces se puede verificar fácilmente que H es normal en G, pues hay sólo dos clases laterales derechas a saber, N y ϕN, las cuales son iguales a las únicas dos clases laterales izquierdas N y $N\phi$.

4.3 Grupo Cociente

Sea G un grupo y N un subgrupo normal de G. Entonces el conjunto de las clases laterales derechas de N en G, el cual denotamos por G/N, se puede dotar de estructura de grupo.

En primer lugar, definimos una multiplicación en G/N de la forma siguiente:

$$\begin{array}{rcl} G/N \times G/N & \longrightarrow & G/N \\ (Na, Nb) & \longrightarrow & Na \cdot Nb = Nab \end{array} \tag{4.2}$$

Nótese que por ser N normal se tiene que el producto de dos clases laterales derechas es de nuevo una clase lateral derecha, pues

$$Na \cdot Nb = N(aN)b = N \cdot Nab = Nab$$

Se pueden verificar los 4 axiomas de grupo para el conjunto cociente G/N con la operación así definida:

1) Si Na y Nb son dos clases laterales, entonces

$$NaNb = Nab \in G/N.$$

2) Si Na, Nb y Nc están en G/N se tiene

$$\begin{aligned} Na(NbNc) &= Na(Nbc) \\ &= Na(bc) \\ &= N(ab)c \\ &= (NaNb)Nc \end{aligned}$$

3) Si $Na \in G/N$, entonces

$$Na \cdot N = Na = N \cdot Na$$

Luego N es el elemento neutro, para la multiplicación de clases laterales.

4) Si $Na \in G/N$, $Na^{-1} \in G/N$ y

$$\begin{aligned} Na \cdot Na^{-1} = N(aa^{-1}) = Ne = N \\ Na^{-1} \cdot Na = N(a^{-1}a) = Ne = N \end{aligned}$$

Teorema 4.3.1 *Sea N normal en G, entonces G/N es un grupo y*

$$\circ(G/N) = \frac{\circ(G)}{\circ(N)}.$$

Demostración: Hemos probado que G/N es un grupo con la operación de multiplicación dada en (**??**)

Por otro lado el orden del grupo cociente G/N es igual al número de clases laterales de G en N, el cual viene dado por el índice de N en G, esto es:

$$|G/N| = [G : N]$$

De acuerdo a la fórmula (**??**), Capítulo 1 se tiene

$$|G/N| = \frac{\circ(G)}{\circ(N)}$$

♠

Ejercicios

1) Demuestre que si H es normal en G y N es un subgrupo normal de G, entones NH es un subgrupo de G.

2) Sea G el grupo de matrices reales 2×2 de la forma

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

con $\triangle_A = ad - bc \neq 0$.

Consideremos el conjunto H de matrices en G, tales que

$$\triangle_h = 1, \quad \text{para toda } h \in H.$$

Probar que H es un subgrupo normal de G.

3) Sea G un grupo y N un subgrupo de G. Probar que N es normal si cumple $[G : N] = 2$.

4) Sea G un grupo, $a \in G$. Definimos el **Normalizador de** a como

$$N(a) = \{x \in G \mid xa = ax\}$$

Demuestre que
a) $N(a)$ es un subgrupo de G.
b) $N(a)$ es normal en G.

5) Sea G un grupo y H subgrupo de G. el **Normalizador de** H es el conjunto

$$N(H) = \{x \in G \mid xHx^{-1} = H\},$$

Probar que:
a) $N(H)$ es un subgrupo de G.
b) H es un subgrupo de $N(H)$.
c) H es normal en $N(H)$.

6) Sea G un grupo, definimos el **centro de** G como

$$Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx, \ \forall g \in G\}$$

Probar que $Z(G)$ es un subgrupo de G, el cual es abeliano.

7) Hallar los centros de los grupos siguientes:
i) S_3, el grupo de simetrías de orden 6.
ii) $M_{2\times 2}(\mathcal{Q})$, grupo de matrices de orden 2×2 sobre los números racionales.

8) Sea G el grupo de enteros módulo 6 con la suma y $H = \{\overline{0}, \overline{2}\}$. Hallar el grupo cociente G/H.

9) Sea $S = \{1, 2, 3, 4\}$ y H el subgrupo de $A(S)$ formado por aquellos elementos σ, tales que $\sigma(1) = 1$ ¿Es H normal en $A(S)$? Hallar el normalizador de H en $A(S)$.

10) Sea H como en 9) y consideremos la biyección

$$\sigma : \begin{array}{ll} 1 & \longrightarrow 1 \\ 2 & \longrightarrow 2 \\ 3 & \longrightarrow 4 \\ 4 & \longrightarrow 3 \end{array}$$

Hallar el nromalizador de σ en H.

11) Demuestre que $Z(A(S)) = \{e\}$.

12) Demuestre que si un elemento $a \in G$, satisface $gag^{-1} = a^s$, para algún s entero, entonces el grupo cíclico $< a >$ es normal en G.

13) Hallar un subgrupo normal $A(S)$, donde $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

14) Hallar un subgrupo normal en D_4.

15) Sea G un grupo y U un subconjunto de G. Si $gug^{-1} \in U$ para todo $g \in G$, $u \in U$, probar que $\langle U \rangle$ es normal en G.

16) Sea G un grupo, y U el conjunto

$$U = \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G\}$$

En este caso escribimos $G' = \langle U \rangle$ y lo llamamos el subgrupo conmutador de G. Probar
a) G' es normal en G.

b) GIG' es abeliano.

c) Si GIN es abeliano, probar que N ⊃ G'

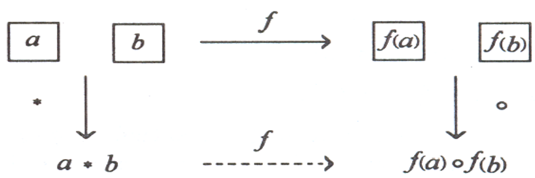
d) Probar que si H es un subgrupo de G y H ⊃ G', entonces H es normal en G.

4 . 4 Homomorfismo

Nos proponemos a definir ahora un cierto tipo de aplicación entre dos grupos, el cual sea compatible con las operaciones definidas en cada grupo.

Sea *f :* (G, *) -+ (G, o) una aplicación entre dos grupos. Si a y *b* son elementos de G, entonces a * *b* es un elemento de G. Por otra parte *f (a)* y *f (b)* son elementos de G, luego el producto de ellos *f (a)* o *f (b)* esta en *G .*

La idea que buscamos es tener una función *f* con la propiedad de hacer el siguiente diagrama conmutativo



Definición 4.4.1 Sean (G, *) y *(G, o) dos* grupos. Una aplicación

¢ : G --> *G ,*

se llama homomorfismo *de* grupos, si y solo si

¢(a * *b) =* O(a) o *O(b)* para *todo* a, *b E* G.

Observación: Usualmente utilizamos la misma notación para el producto en ambos grupos entonces la condición de homorfismo se escribe

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

Ejemplo 1: Si G y $\overline{G}$ son dos grupos y $\overline{e}$ es el elemento neutro de $\overline{G}$, la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \phi \ : \ G & \longrightarrow & \overline{G} \\ x & \longrightarrow & \bar{e} \end{array}$$

Se llama **homorfismo nulo**

Ejemplo 2: Sea $(\mathbb{Z}, +)$ los números enteros con la suma y

$$\begin{array}{rcl} \phi \ : \ (\mathbb{Z}, +) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_6 \\ x & \longrightarrow & [x] \end{array}$$

se puede verificar que ϕ es un homorfismo de grupos.

Lema 4.4.1 *Sea G un grupo y sea N un subgrupo normal de G. Definamos*

$$\begin{array}{rl} \phi \ : & G \longrightarrow G/N \\ & \phi(x) = Nx \end{array}$$

entonces ϕ es un homomorfismo sobre.

Este homomorfimo se llama la **proyección canónica sobre** N

Demostración: Sea x, y en G. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \phi(xy) & = & Nxy \\ & = & Nx \cdot Ny \\ & = & \phi(x) \cdot \phi(y) \end{array}$$

con esto se demuestra que ϕ es un homorfismo. Además, si $Nx \in G/N$, se tiene que

$$\phi(x) = Nx, \quad \text{con } x \in G.$$

Luego ϕ es sobre.

♠

Dos propiedades muy importantes de los homomorfismos son las siguientes:

Lema 4.4.2 *Sea $\phi : G \longrightarrow \overline{G}$ un homomorfismo de grupos y $e, \bar{e}$ los elementos neutros de G y $\overline{G}$ respectivamente. Entonces*

1) $\phi(e) = \bar{e}$.

2) $\phi(x^{-1}) = [\phi(x)]^{-1}$, para todo $x \in G$.

Demostración:

1) Tenemos que

$$\phi(ee) = \phi(e)\phi(e),$$

por otra parte

$$\phi(ee) = \phi(e)$$

Igualando ambas expresiones

$$\phi(e)\phi(e) = \phi(e)$$

Usando la ley de cancelación en el grupo $\overline{G}$ se obtiene

$$\phi(e) = \bar{e}$$

2) Sea $x \in G$. Entonces

$$\begin{aligned} \bar{e} &= \phi(e) \\ &= \phi(xx^{-1}) \\ &= \phi(x)\phi(x^{-1}) \end{aligned}$$

Luego el inverso de $\phi(x)$ en el grupo $\overline{G}$, viene dado por

$$[\phi(x)]^{-1} = \phi(x^{-1})$$

♠

Definición 4.4.2 *Sea* $\phi : G \longrightarrow \overline{G}$, *entonces el* **Kernel de** ϕ, *o* **núcleo** *es el subconjunto de* G

$$\ker\phi = \{x \in G \mid \phi(x) = e\}.$$

Teorema 4.4.1 *Sea* $\phi : G \longrightarrow \overline{G}$ *un homomorfismo de grupos. Entonces* $\ker\phi$ *es un subgrupo normal de* G.

Demostración: En primer lugar demostramos que $\ker\phi$ es un subgrupo de G. Sean $a, b \in \ker\phi$, entonces:

$$\begin{aligned} \phi(ab) &= \phi(a)\phi(b) \\ &= \bar{e}\bar{e} \\ &= \bar{e}, \end{aligned}$$

luego $ab \in \ker\phi$.

Por otro lado, sea $a \in G$, luego se tiene

$$\begin{aligned} \phi(a^{-1}) &= \phi^{-1}(a) \\ &= \bar{e}^{-1} \\ &= \bar{e}, \end{aligned}$$

de donde

$$a^{-1} \in \ker\phi$$

Por lo tanto $\ker\phi$ es un subgrupo de G.

Finalmente para demostrar la normalidad, sea $g \in G$ y $n \in \ker\phi$. Luego

$$\begin{aligned} \phi(g^{-1}ng) &= \phi^{-1}(g)\phi(n)\phi(g) \\ &= \phi^{-1}(g)\bar{e}\phi(g) \\ &= \phi^{-1}(g)\phi(g) \\ &= \bar{e} \end{aligned}$$

Luego hemos demostrado

$$g^{-1}ng \subseteq \ker\phi, \quad \forall n \in \ker\phi$$

Por lo tanto

$$g^{-1}\ker\phi g \subseteq \ker\phi \quad \forall g \in G.$$

Así pues $\ker\phi$ es normal en G.

♠

Definición 4.4.3 *Un homomorfismo de grupo $\phi : G \longrightarrow \overline{G}$ se dice* **isomorfismo** *si y sólo si ϕ es una biyección.*

En tal situación diremos que los grupos G y $\overline{G}$ **son isomorfos** y lo denotamos por

$$G \approx \overline{G}.$$

Proposición 4.4.1 *Sea $\phi : G \longrightarrow \overline{G}$ un isomorfismo, entonces la aplicación inversa $\phi^{-1} : \overline{G} \longrightarrow G$ es también un isomorfismo.*

Demostración: En efecto, sea $y_1, y_2 \in \overline{G}$, luego existen $x_1, x_2 \in G$ tales que

$$y_1 = \phi(x_1), \quad y_2 = \phi(x_2)$$

luego

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(y_1y_2) &= \phi^{-1}(\phi(x_1)\phi(x_2)) \\ &= \phi^{-1}(\phi(x_1x_2)) \\ &= x_1x_2 \\ &= \phi^{-1}(y_1)\phi^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

♠

Proposición 4.4.2 *Sean* G, $\overline{G}$ *y* $\overline{\overline{G}}$ *tres grupos y*

$$\phi : G \longrightarrow \overline{G} \quad \text{y} \quad \psi : \overline{G} \longrightarrow \overline{\overline{G}}$$

isomorfismos, entonces la composición

$$\phi\psi : G \longrightarrow \overline{\overline{G}}$$

es también un isomorfismo.

Demostración: Sean $x, y \in G$, entonces

$$\begin{aligned} \phi\psi(xy) &= \psi(\phi(xy)) \\ &= \psi(\phi(x)\phi(y)) \\ &= \psi(\phi(x))\psi(\phi(y)) \\ &= \phi\psi(x)\phi\psi(y) \end{aligned}$$

Luego $\phi\psi$ es un homomorfismo. Como ϕ y ψ son aplicaciones biyectivas entonces $\phi\psi$ es biyectiva. Por lo tanto $\phi\psi$ es un isomorfismo.

♠

Observación: La relación de isomorfismo es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los grupos. Esto puede ser demostrado usando las dos proposiciones anteriores.

Teorema 4.4.2 *(Primer Teorema de Isomorfismo)*
Sea $\phi : G \longrightarrow \overline{G}$ *un homorfismo sobre, con* $\ker\phi = K$. *Entonces*

$$G/K \approx \overline{G}.$$

Demostración: Consideremos el siguiente diagrama.
donde

$$\begin{array}{rcccc} \pi & : & G & \longrightarrow & G/K \\ & & g & \longrightarrow & Kg \end{array}$$

es la aplicación **proyección**.

Definimos

$$\begin{array}{rcl} \psi \ : \ G/K & \longrightarrow & \overline{G} \\ Kg & \longrightarrow & \phi(g) \end{array}$$

1) Probaremos en primer lugar que ψ esta bien definida.

Sean

$$Kg_1 = Kg_2, \quad \text{entonces} \quad g_1 g_2^{-1} \in K$$

luego

$$\phi(g_1 g_2^{-1}) = \bar{e}$$

y de esto se deduce

$$\phi(g_1) = \phi(g_2),$$

lo cual implica

$$\psi(Kg_1) = \psi(Kg_2).$$

2) ψ es un homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \psi(Kg_1Kg_2) & = & \psi(Kg_1g_2) \\ & = & \phi(g_1g_2) \\ & = & \phi(g_1)\phi(g_2) \\ & = & \psi(Kg_1)\psi(Kg_2) \end{array}$$

3) ψ es 1:1

Sea $Kg \in \ker\psi$, luego

$$\psi(Kg) = \phi(g) = \bar{e}$$

Esto implica que $g \in \ker\phi = K$. Luego $Kg = K$, elemento neutro en G/K.

4) ψ es sobre.

Sea $\bar{g} \in \overline{G}$, debemos demostrar que existe $Kg \in G/K$ tal que

$$\psi(Kg) = \bar{g}$$

Ahora bien, como ϕ es sobre, existe $g \in G$ tal que

$$\phi(g) = \bar{g}$$

Luego tenemos

$$\psi(Kg) = \phi(g) = \bar{g}$$

por lo tanto ψ es sobre.

Hemos probado que ψ es un isomorfismo.

♠

Teorema 4.4.3 *(Segundo Teorema de Isomorfismo)*

Sea $\phi : G \longrightarrow \overline{G}$ un homomorfismo de grupos, con $\ker\phi = K$. *Bajo estas condiciones tenemos*

I) Si $\overline{H}$ un subgrupo de $\overline{G}$ y definamos

$$H = \phi^{-1}(\overline{H}) = \{g \in G \mid \phi(g) \in \overline{H}\}$$

Entonces

i) $K \subseteq H$.

ii) H es un subgrupo de G.

iii) Si $\overline{H}$ es normal en $\overline{G}$, H es normal en G.

II) Si L un subgrupo de G y $\overline{K} \subseteq L$, entonces

$$\overline{L} = \phi(L)$$

es un subgrupo de G y

$$L = \phi^{-1}(\overline{L}).$$

Luego existe una correspondencia biyectiva entre los conjuntos

$$\mathcal{A} = \{H \mid H \textit{ subgrupo de } G \text{ y } K \subseteq H\}$$

y

$$\mathcal{B} = \{\overline{H} \mid \overline{H} \textit{ subgrupo de } \overline{G}\}$$

Demostración I:
i) Sea $\overline{H}$ un subgrupo de $\overline{G}$. Probaremos que $K \subset H$. En efecto, si $g \in K$ se tiene

$$\phi(g) = \bar{e} \in \overline{H},$$

Luego $g \in \phi^{-1}(\overline{H})$, y por lo tanto $K \subseteq H$.

Probaremos que H es un subgrupo de G.

ii) Sean $g_1, g_2 \in H$, luego $\phi(g_1) \in \overline{H}$, $\phi(g_2) \in \overline{H}$ y entonces $\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2) \in \overline{H}$, pues $\overline{H}$ es un grupo.

Por lo tanto

$$g_1 g_2 \in H$$

También, si $g \in H$, $\phi(g) \in \overline{H}$ y por lo tanto el inverso de este elemento, $[\phi(g)]^{-1}$ pertenece a $\overline{H}$

Luego

$$\phi(g^{-1}) = [\phi(g)]^{-1} \in \overline{H}$$

Por lo tanto $g^{-1} \in H$. Así pues, hemos demostrado que H es un subgrupo de G.

iii) Supongamos que $\overline{H}$ es normal en $\overline{G}$. Sean $h \in H$ y $g \in G$. Entonces

$$\begin{aligned} \phi(ghg^{-1}) &= \phi(g)\phi(h)\phi(g^{-1}) \\ &= \bar{g}\bar{h}(\bar{g})^{-1} \end{aligned}$$

donde $\overline{g} = \phi(g)$, $\overline{h} = \phi(h)$. Se tiene entonces

$$\phi(ghg^{-1}) \in \overline{H}$$

por ser $\overline{H}$ normal en $\overline{G}$. Luego

$$ghg^{-1} \in H$$

y de esto se sigue que H es normal en G.

Demostración II: Sea L un subgrupo de G que contiene a K. Entonces definimos su imagen bajo ϕ

$$\overline{L} = \{\phi(g) \mid g \in L\}$$

entonces es fácil probar que $\overline{L}$ es un subgrupo de $\overline{G}$

Por otro lado, sea $\overline{L}$ un subgrupo de $\overline{G}$ y consideremos $T = \{g \in G \mid \phi(g) \in \overline{L}\}$. Entonces afirmamos que

$$T = L.$$

En efecto, si $g \in T$ se tiene que $\phi(g) \in \overline{L}$, y luego existe $\ell_1 \in L$ tal que $\phi(\ell_1) = \phi(g)$. Entonces

$$\phi(\ell_1)\phi(g^{-1}) = e,$$

por lo tanto

$$\ell_1 g^{-1} \in K \subseteq L$$

Luego existe $\ell_2 \in L$, tal que

$$\ell_1 g^{-1} = \ell_2$$

lo cual implica

$$g = \ell_2^{-1}\ell_1 \in L$$

Hemos demostrado $T \subseteq L$

Por otro lado, si $\ell \in L$, entonces $\phi(\ell) \in \overline{L}$, luego $\ell \in T$. Con esto se prueba que $L \subseteq T$. Esto es

$$T = L$$

♠

Teorema 4.4.4 *(Tercer Teorema de Isomorfismo)*

Sea $\phi : G \longrightarrow \overline{G}$ *un homomorfismo sobre, con* $\ker \phi = K$*. Sea* $\overline{N}$ *un subgrupo normal de* $\overline{G}$ *y* $N = \{g \in G \mid \phi(g) \in \overline{N}\}$*. Entonces*

$$G/N \approx \overline{G}/\overline{N}$$

y además

$$G/N \approx \frac{G/K}{N/K}.$$

Demostración: Tenemos el diagrama

Definamos

$$\begin{array}{rcccc} \psi & : & G & \longrightarrow & \overline{G}/\overline{N} \\ & & g & \longrightarrow & \overline{N}\phi(g) \end{array}$$

Entonces se puede probar que ψ es un homomorfismo sobreyectivo.

¿Quién es el $\ker \psi$?

Sea $g \in \ker \psi$. Luego

$$\psi(g) = \overline{N}\phi(g) = \overline{N}$$

esto es $\phi(g) \in \overline{N}$, luego $g \in N$, por lo tanto

$$\ker \psi = N$$

Entonces por el primer teorema de los homomorfismos de grupos se concluye

$$G/N \approx \frac{\overline{G}}{\overline{N}}$$

Por otro lado, sea la aplicación

$$\begin{array}{rcccl} \overline{\phi} & : & G/K & \longrightarrow & \overline{G}/\overline{N} \\ & & Kg & \longrightarrow & \overline{N}\phi(g) \end{array}$$

Entonces $\overline{\phi}$ es un homomorfismo de grupos, el cual es sobre, pues ϕ lo es.

¿Quién es $\ker\overline{\phi}$?

Sea $Kg \in \ker\overline{\phi}$, entonces $\overline{N}\phi(g) = \overline{N}$ y por lo tanto $\phi(g) \in \overline{N}$. Luego $g \in N$ y de aquí se concluye

$$\ker\overline{\phi} = \{Kg \mid g \in N\} = N/K$$

Entonces aplicando nuevamente el primer teorema de los isomorfismos a $\overline{\phi}$, se concluye

$$G/K \Big/ N/K \approx \overline{G}/\overline{N}$$

Ejemplo 1: Sea G el grupo aditivo de los números enteros, $(\mathbb{Z}, +)$ y $10\mathbb{Z}$ el subgrupo de los múltiplos de 10. Como G es abeliano, todos sus subgrupos son normales. Luego se pue formar el grupo cociente $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. Veamos como se obtiene dicho grupo, por medio de un homomorfismo.

Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rcccl} \phi & : & G & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{10} \\ & & x & \longrightarrow & \overline{x} \end{array}$$

donde $\overline{x}$ es la clase de congruencia módulo 10 de x. Entonces se puede verificar que ϕ es un homomorfismo de grupos. Sea $y \in Ker\phi$, luego $\phi(y) = \overline{y} = \overline{0}$, lo cual implica que $y \equiv 0 \ mod\ 10$. y por lo tanto

$y \in 10\mathbb{Z}$. Reciprocamente, si $y \in 10\mathbb{Z}$ se deduce que $y \in Ker\phi$. Por lo tanto concluimos que $Ker\phi = 10\mathbb{Z}$.

Aplicando el primer teorema de los isomorfismos se tendrá:

$$\mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}_{10}.$$

Sea ahora $\overline{H} =< \overline{2} >$ el subgrupo de $\mathbb{Z}_{10}$ generado por la clase $\overline{2}$. ¿Cuál es la imágen inversa de $\overline{H}$ bajo ϕ? Afirmamos que $\phi^{-1}(\overline{H}) = H$ donde $H = 2\mathbb{Z}$. En efecto, si $x \in H$, entonces $\overline{x}$ es congruente módulo 10 a alguna de las clases $\overline{0}$, $\overline{2}$, $\overline{4}, \overline{6}$, $\overline{8}$. Por otro lado, se debe tener $x = 2i+10k$, para algunos i, k enteros y de aquí se deduce que x es par. Luego $x \in 2\mathbb{Z}$. También se demuestra fácilmente que $2\mathbb{Z} \subset \phi{-}1(\overline{H})$. Luego la afirmación es válida.

Entonces, usando el tercer teorema de los isomorfismos concluimos

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \Big/ 2\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$$

y además

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}_{10}/\overline{H}$$

Ejercicios

1) Demuestre que la relación de isomorfismo es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los grupos.

2) Sea $\phi : G \longrightarrow \overline{G}$ un isomorfismo. Probar que si G es cíclico entonces $\overline{G}$ debe ser cíclico.

3) Demuestre que si G_1 y G_2 son dos grupo finitos isomorfos, entonces, $|G_1| = |G_2|$.

4) Sea G el grupo de los números complejos, distintos de cero, bajo el producto. Sea H el conjunto de todos los $Z \in G$ tales que

$$Z^7 = 1$$

a) Demuestre que H es un grupo finito de orden 7.
b) Demuestre: $H \approx (\mathbb{Z}_7, +)$.

5) Sea $\phi : G \longrightarrow \overline{G}$ un isomorfismo de grupos. Entonces probar:
a) $\circ(g) = \circ(\phi(g))$ para todo $g \in G$.
b) G es abeliano si y sólo si $\overline{G}$ lo es.

6) Demuestre que $(\mathbb{Z}, +)$ y $(2\mathbb{Z}, +)$, el grupo aditivo de los enteros pares, son isomormofos.

7) Demuestre que $(\mathbb{Z}, +)$ y $(\mathbb{Q}, +)$ no son isomorfos.

8) Demuestre que los grupos de ordenes 4; $\mathbb{Z}_4$ y V no son isomorfos.

9) Demuestre que el grupo de simetrías del cuadrado y el grupo diédrico son isomorfos.

10) Demuestre que el grupo de rortaciones de un polígono regular de n vértices es isomorfo a $(\mathbb{Z}_n, +)$.

11) ¿Cuántos homomorfismos hay de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$? ¿ Cuántos isomorfismos hay?

12) ¿Cuántos homomorfismos hay de $(\mathbb{Z}, +)$ en $(\mathbb{Z}_2, +)$?

13) Demuestre que $(\mathbb{Z}, +)$ no es isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

14) Sea G un grupo y $a \in G$. Defina una aplicación $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow G$, que $n \longrightarrow a^n$ ¿Qué posibilidades hay para el $\ker \phi$?

15) Halle un subgrupo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ isomorfo a $\mathbb{Z}$.

16) Sea $\phi : (\mathbb{Q}, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Q}^+, \cdot)$, $x \longrightarrow |x|$. Demuestre que ϕ es un homomorfismo sobre ¿Cuál es el $\ker \phi$?

17) Demuestre que U_{10} es isomorfo a $(\mathbb{Z}_4, +)$.

18) Demuestre que $(\mathbb{R}, +)$ es isomorfo a $(\mathbb{R}^+, \cdot)$.

19) Sea G un grupo cíclico de orden m. Demuestre que G tiene $\phi(m)$ generadores.

20) Demuestre que S_3 no es isomorfo a $(\mathbb{Z}_6, +)$

21) Demuestre que todo grupo cíclico de orden n es isomorfo a $(\mathbb{Z}_n, +)$.

22) Demuestre que todo grupo cíclico infinito es isomorfo a $(\mathbb{Z}, +)$.

23) Sea $H = (6\mathbb{Z}, +)$ el conjunto de enteros multiplos de 6. Demuestre usando el primer teorema de isomorfismos que

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}_6$$

24) Sea G el grupo diédrico, definido por los símbolos $x^i y^j$ sujeto a las relaciones

$$x^2 = e, \quad y^n = e, \quad xy = y^{-1}x.$$

Probar que:

a) El subgrupo $N = \{e, y, y^2, \ldots, y^{n-1}\}$ es normal en G.

b) $G/N \approx W$, donde $W = \{1, -1\}$ subgrupo de los números reales bajo la multiplicación.

25) Sea G el grupo diédrico de orden 4, el cual lo denotamos por D_4. Los elememntos de D_4 son los símbolos $x^i y^j$ con

$$x^2 = e, \quad y^4 = e, \quad xy = y^{-1}x$$

Hallar un subgrupo de S_4 tal que sea isomorfo a D_4.

4.5 Grupos de Automorfismos

Definición 4.5.1 *Sea G un grupo. Una aplicación $\phi : G \longrightarrow G$, la cual es un isomorfismo, se llama un* **automorfismo de** G.

El conjunto de todos los automorfismo de G, se denota por $A(G)$

Teorema 4.5.1 *Sea G un grupo. Entonces $A(G)$ es un grupo.*

Demostración: Sean $\phi_1, \phi_2 \in A(G)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\phi_1\phi_2(xy) &= \phi_1(xy)\phi_2 \\
&= [\phi_1(x)\phi_1(y)]\phi_2 \\
&= \phi_1\phi_2(x)\phi_1\phi_2(y)
\end{aligned}$$

Luego

$$\phi_1\phi_2 \in A(G), \quad \forall x, y \in G$$

Además si $\phi \in A(S)$, ϕ^{-1} existe y es biyectiva. Sean $x_1, x_2 \in G$. Luego

$$\phi^{-1}(x_1) = y_1, \quad \phi^{-1}(x_2) = y_2$$

y

$$\begin{aligned}
\phi(\phi^{-1}(y_1y_2)) &= y_1y_2 \\
&= \phi^{-1}(x_1)\phi^{-1}(x_2) \\
&= \phi^{-1}(\phi(y_1))\phi^{-1}(\phi(\phi(y)) \\
&= \phi(\phi^{-1}(y_1))\phi(\phi^{-1}(y_2)) \\
&= \phi(\phi^{-1}(y_1)\phi^{-1}(y_2))
\end{aligned}$$

Como ϕ es inyectiva, se tiene entonces

$$\phi^{-1}(y_1y_2) = \phi^{-1}(y_1)\phi^{-1}(y_2).$$

Con esto termina la demostración.

♠

El problema que vamos a atacar ahora es el de determinar el conjunto $A(G)$, dado un grupo G.

Ejemplo 1: Si G es abeliano entonces la aplicación

$$\begin{aligned}
\phi \; : \; G &\longrightarrow G \\
x &\longrightarrow x^{-1}
\end{aligned}$$

es un automorfismo.

Ejemplo 2: Si G es no abeliano entonces para cada $g \in G$, definimos

$$\begin{aligned}
T_g \; : \; G &\longrightarrow G \\
x &\longrightarrow g^{-1}xg
\end{aligned}$$

Entonces Tg es un automorfismo (verificarlo!) llamado **automorfismo interno de** G.

El conjunto de los automorfismo internos de G, será denotado por $I(G)$

Teorema 4.5.2 *Sea G un grupo cualquiera, entonces*

$$I(G) = \{T_g \mid g \in G\}$$

es un subgrupo del grupo $A(G)$, de automorfismos de G.

Demostración: Sean $T_{g_1}, T_{g_2} \in I(G)$. Luego

$$\begin{aligned} T_{g_1}T_{g_2}(x) &= (g_1^{-1}xg_1)T_{g_2} \\ &= g_2^{-1}g_1^{-1}xg_1g_2 \\ &= (g_1g_2)^{-1}x(g_1g_2) \\ &= T_{g_1g_2}(x) \quad \forall x \in G \end{aligned}$$

Luego

$$Tg_1Tg_2 = Tg_1g_2 \tag{4.3}$$

y por lo tanto $I(G)$ es cerrado bajo el producto. Además si $Tg \in I(G)$

$$TgTg^{-1} = Te = I, \quad \text{por la fórmula (??)}$$

Luego

$$(Tg)^{-1} = Tg^{-1} \in I(G.)$$

♠

Definición 4.5.2 *Sea G un grupo. Un subgrupo H de G se llama* **subgrupo característico**, *si para todo automorfismo T de G, se tiene $T(H) \subset H$.*

Observación Si H es un subgrupo característico de G, entonces H es normal en G. Para ver esto, sea $g \in G$. Entonces el automorfismo interno $T_g : G \longrightarrow G$ satisface $T_g(H) \subset H$. Luego se tiene $ghg^{-1} \in H$, para todo h en H. Por lo tanto H es normal.

El reciproco de este resultado no es cierto en general. Existen subgrupos normales que no son característicos, como se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1: Sea $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ con la operación de suma de coordenadas. Sea $H = 2\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$, el cual es un subgrupo de G, y además es normal. Sin embargo, H no es característico, pues al considerar el automorfismo

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & G & \longrightarrow & G \\ & & (a,b) & \longrightarrow & (b,a) \end{array}$$

no se tiene $T(H) \subset H$. Sea G un grupo cualquiera entonces **el centro de** G es el conjunto

$$Z = \{x \in G \mid xg = gx \ \forall g \in G\}$$

Se puede verificar que Z es un subgrupo normal de G.

Teorema 4.5.3 *Sea G un grupo y $I(G)$ el grupo de automorfismos internos. Entonces*

$$I(G) \approx G/Z.$$

Demostración: Sea

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & G & \longrightarrow & I(G) \\ & & g & \longrightarrow & T_g \end{array}$$

Entonces ϕ es un homomorfismo sobreyectivo.

En efecto, sean $g_1, g_2 \in G$. Luego

$$\phi(g_1 g_2) = T_{g_1 g_2} = T_{g_1} T_{g_2} \quad \text{por fórmula (??)}$$

Además ϕ es sobre.

Por otro lado, si $g \in Z$ entonces es claro que $T_g = 1$ es la identidad. Luego

$$Z \subseteq \ker \phi$$

Si $g \in \ker g$ entonces

$$Tg(x) = g^{-1}xg = x, \quad \text{para todo } x \in G.$$

Luego

$$xg = gx, \quad \text{para todo } x \in G$$

lo cual implica que

$$\ker \phi \subseteq Z$$

Por lo tanto hemos demostrado que $Ker(\phi) = Z$, y usando el primer teorema de los homomorfismos, se concluye

$$G/\ker \phi \approx I(G)$$

Luego

$$G/Z \approx I(G)$$

♠

A continuación, determinaremos todos los automorfismos de un grupo cíclico G, de orden r.

Teorema 4.5.4 *Sea $G =< g >$ un grupo cíclico de orden r. Entonces $A(G) \approx U_r$, donde U_r es el grupo de enteros módulo r con la multiplicación.*

Demostración: Sea $T \in A(G)$, entonces si g es un generador se tiene

$$T(g^i) = T^i(g) \quad \text{para todo } 1 \leq i$$

Luego para determinar un automorfismo T, basta con determinar la imagen de $T(g)$.

Ahora bien, como $T(g)$ debe tener el mismo orden que g, se tiene que $T(g)$ es un generador de G.

Luego la aplicación

$$\begin{array}{rcccc} \psi & : & A(G) & \longrightarrow & U_r \\ & & T_i & \longrightarrow & i \end{array}$$

donde $T_i(g) = g^i$ es un isomorfismo (verificarlo!).

♠

Ejercicios

1) Hallar todos los automorfismos de $\mathbb{Z}_4$.

2) Demuestre que $A(\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}_2$

3) Demuestre que para $G = S_3$ se tiene $I(G) \approx S_3$

4) Sea G un grupo y G' el subgrupo conmutador. Probar que G' es un grupo característico.

5) Sea G un grupo de orden 9, generado por los elementos a, b, donde $a^3 = b^3 = e$. Hallar todos los automorfismos de G.